

بسمه تعالی

سری چهارم      آنالیز مختلط      تاریخ از سال ۹۳/۹/۱۶      تاریخ تحویل هفته آخر ترم

۱- اگر  $z \neq 0$   $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$  نشان دهید  $f(z)$  در مبدا در معادلات کشی ریمان صدق می کند ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۲- نشان دهید تابع  $f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$  در  $z = 0$  در معادله کشی ریمان صدق می کند. آیا  $f(z)$  در  $z = 0$  تحلیلی است.

۳- نشان دهید تابع  $f(z) = z|z|$  هیچ جا تحلیلی نیست.

۴- تابع  $f(z) = xy^2 + ix^2y$  در کجا در شرایط کشی ریمان صدق می کند، کجا مشتق پذیر است، کجا تحلیلی است؟

۵- مطلوبست تعیین فرمولهای کشی-ریمان در دستگاه مختصات قطبی.

۶- در مشتق پذیری توابع زیر بررسی کنید:

$$a) f(z) = \frac{z}{\operatorname{Re}(z)} \quad b) f(z) = \bar{z}^2 \quad c) f(z) = 4z + \frac{1}{z} \quad d) f(z) = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) \quad e) f(z) = \operatorname{Im}\left(\frac{2z}{z+1}\right)$$

۷- در تحلیلی بودن تابع  $f(z) = |z|^2$  بررسی کنید.

۸- تابع  $f(z) = |x^2 - y^2| + 2ixy$  داده شده است. در تحلیلی بودن تابع در نقاط مختلف صفحه مختلط بررسی کنید.

۹- اگر  $z \neq 0$   $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$  (الف) در پیوستگی و نا پیوستگی تابع بررسی کنید. (ب) در مورد تحلیلی بودن تابع بررسی نمایید.

۱۰- با استفاده از معادلات کشی ریمان در دستگاه مختصات قطبی مشخص کنید تابع  $f(z)$  در کجا دارای مشتق است و سپس مقدار آن را بیابید.

$$a) f(z) = \frac{1}{z}, \quad b) f(z) = x^2 + iy^2 \quad c) f(z) = z \operatorname{Im}(z)$$

۱۱- اگر  $u, v$  در ناحیه  $R$  همساز باشند ثابت کنید  $\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$  در  $R$  تحلیلی است.

۱۲- فرض کنید تابع  $f(z) = u + iv$  در ناحیه  $D$  تحلیلی است و  $|f(z)|^2 = K$  که در آن  $K$  عددی ثابت است. نشان دهید که  $f(z)$  در ناحیه  $D$  ثابت است.

۱۳- اگر  $u(x, y) = \cos(x)\cosh(y)$  قسمت حقیقی تابع  $f(z) = u + iv$  باشد، مطلوبست محاسبه  $f'(z)$ .

۱۴- تابع زیر در کدام نقاط مشتق پذیر است؟ در صورت مشتق پذیری، مشتق را محاسبه نمایید. نواحی که تابع تحلیلی است را مشخص کنید.  $f(z) = |3x - y| + i|y - 3x|$

۱۵- اگر تابع  $w = f(z) = u + iv$  تحلیلی باشد به کمک مختصات قطبی نشان دهید:

$$f'(z) = (\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{\sin(\theta) + i\cos(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

و سپس با استفاده از آن مشتق  $f(z) = \sqrt{z}$  را بیابید.

۱۶- نواحی که تابع در آن تحلیلی است را مشخص نمایید

$$f(z) = \frac{|z-1|^2}{z-1} + |x| + i|y|$$

۱۷- اگر  $f(z) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$  نشان دهید تابع در  $z = 0$  در معادلات کشی ریمان

صدق می کند ولی در  $z = 0$  مشتق پذیر نیست.

۱۸- در تحلیلی بودن و نبودن تابع  $f(z)$  بررسی کنید  $f(z) = \frac{z^4-1}{|z^2-1|^2}$

۱۹- تابع  $f(z) = \text{Im}\left(\frac{2z}{z+1}\right)$  در چه نواحی در شرایط کشی-ریمان صدق می کند. مشتق تابع را در صورت وجود بیابید.

۲۰- کلیه توابع همساز به شکل  $u = f\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$  را بیابید.

۲۱- اگر  $f(z) = u + iv$  تابعی تحلیلی باشد نشان دهید  $u, v$  جواب معادله لاپلاس هستند. در این صورت  $u$  را مزدوج همساز  $v$  گویند. آیا  $v$  هم مزدوج همساز  $u$  است؟، یا به عبارتی تابع  $v + iu$  هم تابعی تحلیلی هست؟